



TITLE:

# 連分数展開の収束の加速法と確率分布関数(非線形可積分系の応用数理)

AUTHOR(S):

中山, 功

---

CITATION:

中山, 功. 連分数展開の収束の加速法と確率分布関数(非線形可積分系の応用数理). 数理解析研究所講究録 1995, 933: 61-72

ISSUE DATE:

1995-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59991>

RIGHT:

## 連分数展開の収束の加速法と確率分布関数

名古屋商科大学経営情報学科 中山 功 (Isao Nakayama)

### 1. はじめに

各種の特殊関数の数値計算において、コンピュータ上での近似計算が必要とされる場合に、級数展開、漸近展開、連分数展開などの各種の展開式を用いて、有限項での打ち切りによる近似計算を実行することが多くある。当然、近似に伴う誤差が少ない結果が望まれるが、計算すべき項数が多過ぎてはあまり意味がない。この相反する要求に応えるために、少数項数の展開式から、その収束値を効率的に求めるための各種の加速法が考察されてきた [1]。

ここで、特殊関数として誤差関数などの確率分布関数を考えると、その数値計算で多く用いられる連分数展開においては、 $\epsilon$  アルゴリズムなどのよく知られた加速法が効果的に働かない場合がある。そこではむしろ別の方法として、連分数展開の特質を活用した変形連分数による加速法が有効であると考えられる。以下では、まず一般の変形連分数による加速収束の考え方を提示し、その応用例として、確率分布関数の数値計算に注目して議論をすすめていくことにする。

### 2. 連分数展開とその収束の加速化

まず一般に、次の形式の連分数展開を考察する。

$$f = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots$$

ただし、上式の右辺は次の連分数展開を簡略化した書き方である。

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \cdots}}$$

ここで、この展開式の第 $n$ 項までの近似式 $f_n$ を考えると、以下のように表記できる。

$$f_n = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{A_n}{B_n}$$

ただし、 $A_n$ ,  $B_n$  はともに漸化式

$$x_n = b_n x_{n-1} + a_n x_{n-2}$$

を満たし、 $x_{-1} = 1$ ,  $x_0 = 0$  のとき、 $x_n = A_n$  であり、 $x_{-1} = 0$ ,  $x_0 = 1$  のとき、 $x_n = B_n$  である。

このとき、第 $n$ 項以下の連分数の寄与を $w_n$ として（この $w_n$ を"tail"と呼ぶ）、

$$w_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} + \dots$$

のように定義すると、真の値  $f$  は次式のように表すことも可能である。

$$f = \frac{A_n + A_{n-1}w_n}{B_n + B_{n-1}w_n} = \frac{f_n h_n + f_{n-1} w_n}{h_n + w_n} \quad .$$

ただし、 $h_n = B_n/B_{n-1}$  であり、この  $h_n$  と  $w_n$  とを重みとして考えると、真の値  $f$  は近似値  $f_n$  と  $f_{n-1}$  との加重平均として解釈し、計算することができるようになる。ここで、 $h_n$  は前述の漸化式より計算可能であるが、 $w_n$  は無限の連分数で表現されるものであり、通常では近似値として計算すべきものである。例えばこれを、最も簡単な近似として、 $w_n \doteq 0$  とすると、通常の  $f \doteq f_n$  の近似が得られることは明らかである。

そこでこの近似の精度を上げて、高精度の  $w_n$  の近似を用いて収束の加速化をはかろうとするのが変形連分数の基本的考え方であり、各種の連分数の計算で応用されている [2~5]。まず、最も単純なものとして、 $w_n$  の連分数展開における各項の  $(a_{n+1}, b_{n+1})$  や  $(a_{n+2}, b_{n+2})$  など全て等しいと考えて、

$$w_n \doteq w_n^* = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \dots$$

とする近似を考える。この連分数の収束を仮定すると、

$$w_n^* = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{b_{n+1}^2 + 4a_{n+1}} - b_{n+1})$$

と計算できる（±の適切な解を選択する）ので、これが square-root modification による近似と称されて、各種の数値計算例で議論されている [6]。これより、

$$f \doteq f_n^* = \frac{f_n h_n + f_{n-1} w_n^*}{h_n + w_n^*}$$

とする近似  $f_n^*$  の収束が加速化されていることも各種の例で示されている。

また、この  $f_n^*$  については、以下の等式を満足することが簡単な計算により示されるので、他のよく知られた加速法と比較することも可能である。

$$g_n^2 \Delta h_n + (g_n \Delta^2 f_{n-1} + \Delta f_n \Delta f_{n-1}) h_n = 0 \quad , \quad g_n = f_n^* - f_n \quad .$$

ただし、 $\Delta h_n$  などは前進差分を表しているものとする。この式において、まず  $g_n^2$  の項は小さいと考えて無視すると、

$$f_n^* \doteq f_n - \frac{\Delta f_n \Delta f_{n-1}}{\Delta^2 f_{n-1}}$$

となり、Aitken の  $\Delta^2$  アルゴリズムと同一の式が得られることがわかる。したがって、この場合には従来によく知られたアルゴリズムと同程度の加速化が期待できることになる。さらに、 $\Delta^2 f_{n-1} \doteq 0$  の場合においては、 $g_n^2$  の項は無視できなくなるが、前述の2次方程式の解として得られる近似式を考察すればよいことになる。このように無理関数近似にまで枠を広げて収束の加速化を考えることが、ここで紹介する square-root modification による加速法と従来との大きな相違点であるとも考えられる。この平方根の計算は一見かえって面倒なようにも感じられるが、コンピュータでは乗除とほぼ同レベルの計算であり、むしろ、四則計算を何回も繰り返すよりは単純であろう。

さらに、 $w_n$  の高精度の近似を考察することにより、系統的に加速化を考えていくことも可能である。例えば、 $w_n$  を  $n$  の漸近展開で評価できれば、逐次の近似により加速化できるが、これについては  $w_n$  についての具体的な表式が必要になるので、次章以下で確率分布関数の例に基づいて議論していくことにする。

### 3. 確率分布関数のStieltjes変換と連分数展開

一般に、 $\alpha < t < \beta$  で定義された確率密度関数  $g(t)$  に対して、確率分布関数  $G(x)$  とその Stieltjes 変換  $F(x)$  が以下のように定義され、多くの問題で考察されている [7]。

$$G(x) = \int_{\alpha}^x g(t) dt, \quad \alpha < x < \beta,$$

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(t)}{t+x} dt.$$

ただし、ここで  $x + \alpha > 0$  として、上述の積分と  $n$  次のモーメント  $\mu_n$  の存在を仮定する。

$$\mu_n = \int_{\alpha}^{\beta} t^n g(t) dt, \quad |\mu_n| < \infty.$$

一般には、この  $F(x)$  と  $G(x)$  との関係は単純ではないが、 $g(t)$  としてガンマ分布やベータ分布を考えると、簡単なパラメータ変換により相互に関連づけることが可能になる。この  $F(x)$  は次のように連分数展開されることが知られており、誤差関数、不完全ガンマ関数などに適用された連分数が有名である [5][7][8]。

$$F(x) = \frac{1}{x+a_1} + \frac{-b_1}{x+a_2} + \frac{-b_2}{x+a_3} + \cdots.$$

ただし、 $a_1, b_1$  などは密度関数  $g(t)$  のもとでの直交多項式  $P_s(t)$  と以下のような関係があり、それを用いて計算可能である。

$$\int_{\alpha}^{\beta} P_s(t)P_r(t)g(t)dt = \begin{cases} 0, & s \neq r \\ I_s, & s = r \end{cases},$$

$$P_s(t) = (t - a_s)P_{s-1}(t) - b_{s-1}P_{s-2}(t), \quad P_0(t) = 1, \quad P_{-1}(t) = 0.$$

ここで、前述の  $F(x)$  の数値計算においては、連分数展開の第  $n$  項までの近似式  $F_n$  が通常用いられるが、これは分数変換の繰り返しとして次のように書き直される。

$$F_n = S_n(0),$$

$$S_1(w) = \frac{1}{x + a_1 + w}; \quad S_n(w) = S_{n-1}\left(\frac{-b_{n-1}}{x + a_n + w}\right).$$

また、これを用いて厳密な  $F(x)$  に対しても次のような書き方が可能である。

$$F(x) = S_n(w_n), \quad w_n = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P_n(t)}{t+x} g(t) dt / \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P_{n-1}(t)}{t+x} g(t) dt = \frac{-b_n}{x + a_{n+1}} + \frac{-b_{n+1}}{x + a_{n+2}} + \cdots.$$

この連分数のtailである  $w_n$  を0に近似したものが前述の  $n$  項近似  $F_n$  であり、別の近似で収束の加速化を図ることがここで変形連分数を考えることの主たる目的である [6][9][10]。

#### 4. 変形連分数

上述の  $w_n$  に対する近似として最も単純なものは、square-root modification に相当するものであり、

$$w_n^* = \frac{-b_n}{x + a_{n+1} + w_n^*}$$

の解から、

$$w_n \doteq w_n^* = \frac{1}{2}(\sqrt{(x + a_{n+1})^2 - 4b_n} - x - a_{n+1})$$

が各種の例で考察されている [5][6]。ここで、 $\alpha \geq 0$  の場合を考えると、 $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$  となるので、 $w_n > w_{n+1}$ ,  $(x + a_{n+1})^2 \geq 4b_n$  を仮定すると、 $|S_n(w_n^*) - F(x)| / |S_n(0) - F(x)| < 1$  が証明可能である。これより、近似  $w_n^*$  の有効性が示されるが、さらに、漸化式

$$w_n = \frac{-b_n}{x + a_{n+1} + w_{n+1}}$$

から、逐次的に近似解が構成できれば、より高精度の近似も可能となる。例えば、 $w_n$  の  $n$  に関する漸近展開を利用して、第  $i$  項まで一致する  $w_n^{(i)}$  を考えて近似の精度を上げること可能である。

ここで、これらの逐次近似との比較のために、Aitken の  $\Delta^2$  アルゴリズムに対応する  $w_n$  の近似解を  $w_n^{(\Delta)}$  と定義して考察すると、以下のように書けることがわかる。

$$w_n^{(\Delta)} = -h_n \frac{F_{n+1} - F_n}{F_n - F_{n-1}} = -\frac{b_n}{h_{n+1}} .$$

上式において、 $-h_n$  は前述の  $w_n$  と同一の漸化式を満たし、初期条件だけが次式のように異なっているものである。

$$h_n = \frac{b_n}{x + a_{n+1} - h_{n+1}} , \quad h_1 = x + a_1 .$$

これらの近似式を用いた  $S_n(w_n^{(0)})$  の実際の数値計算において、近似  $w_n^{(0)}$  の計算は 1 回だけではあるが、複雑すぎるとは収束の加速化としては無意味である。例えば、 $w_n^{(0)}$  の計算が連分数の  $k$  項分の計算に相当するとき、

$$\frac{|S_n(w_n^{(0)}) - F(x)|}{|S_{n+k}(0) - F(x)|} < 1$$

が実質的な加速収束の必要条件であることは明らかである [11]。

また、今回の確率分布における例では、上述の連分数展開のパラメータ  $x$  の大きい領域では、 $w_n \approx 0$  の近似においても収束が十分速く、むしろ加速化の対象となるのはパラメータ  $x$  の小さい領域であると言える。そこで、 $w_n$  を  $x$  に関する展開で逐次的に近似できれば、逐次の加速化が実現できると考えられる。以下の章では、いくつかの具体的な確率分布の例で、 $n$  または  $x$  に関する展開を利用して加速化を実現した例を紹介していくことにする。

## 5. 適用例(1) - $n$ に関する展開-

### (a) ガンマ分布関数

確率密度関数  $g(t)$  とそれに対応した直交多項式に関する漸化式の係数  $a_s$ ,  $b_s$  として、

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} \quad (0 < t < \infty), \quad a > 0,$$

$$a_s = a + 2s - 2, \quad b_s = s(a + s - 1)$$

を考える。このとき、tail  $w_n$  の漸近展開は以下ようになる。

$$w_n \sim -n + \sqrt{xn} - \frac{1}{2}(x + a - \frac{3}{2}) + \frac{c_1}{8\sqrt{xn}} + \frac{c_2}{16xn} + \frac{c_3}{16xn\sqrt{xn}} + \cdots ,$$

$$c_1 = x^2 + 2(a-2)x + (a-\frac{1}{2})(a-\frac{3}{2}), \quad c_2 = x^2 - (a-\frac{1}{2})(a-\frac{3}{2}), \quad c_3 = x^2 - \frac{1}{8}c_1^2 - \frac{3}{8}c_2 .$$

ここで、パラメータ  $a$  の変換を介して、

$$F(x; a) = x^{a-1} e^{-x} \Gamma(1-a) (1 - G(x; 1-a)), \quad x > 0, \quad 0 < a < 1$$

の関係が成立するので、

$$G(x; a) = \frac{x^a e^{-x}}{\Gamma(a+1)} + G(x; a+1), \quad x > 0, \quad a > 0$$

の関係を考慮に入れると、整数以外の任意の正の定数  $a$  に対する分布関数  $G(x; a)$  は、 $0 < a < 1$  のときの Stieltjes 変換  $F(x; a)$  を用いて計算が可能になることがわかる。したがって、 $0 < a < 1$  のパラメータ領域において、上述の漸近展開において第  $i$  項まで一致する逐次近似  $w_n^{(i)}$  を考察し、 $F(x) = S_n(w_n) \doteq S_n(w_n^{(i)})$  によって近似計算することを考えればよいであろう。

$$(a0) \quad w_n^{(0)} = 0$$

$$(a1) \quad w_n^{(1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{4n(x+1) + (x+a)^2} - x - 2n - a) \quad (\text{square-root modification})$$

$$(a2) \quad w_n^{(2)} = \sqrt{x(n-1)} - (n-1)$$

$$(a3) \quad w_n^{(3)} = \frac{1}{2}(\sqrt{4x(n-1)} - x - 2n - a + \frac{3}{2})$$

$$(a4) \quad w_n^{(4)} = \frac{1}{2}(\sqrt{4xn + c_1} - x - 2n - a + \frac{3}{2})$$

$$(\Delta) \quad w_n^{(\Delta)} = -\frac{b_n}{h_{n+1}} \quad (\text{Aitken's } \Delta^2)$$

以下の表では、代表的な  $a, x, n$  の数値を与えたときの計算例を示す。

表 1. ガンマ分布関数の数値計算において、代表的な数値  $a, x$  に対して、相対誤差  $|S_n(w_n^{(i)}) / F(x) - 1|$  が与えられた数値を下回るのに必要な項数  $n$ , ただし, \*\* は100項以上を示す

$x$	相対誤差	$a = 0.25$						$a = 0.75$					
		(a0)	(a1)	(a2)	(a3)	(a4)	( $\Delta$ )	(a0)	(a1)	(a2)	(a3)	(a4)	( $\Delta$ )
0.5	$1 \times 10^{-5}$	20	17	15	10	5	13	24	19	18	12	8	16
	$1 \times 10^{-10}$	73	66	58	43	22	56	80	72	65	47	36	61
	$1 \times 10^{-15}$	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
1	$1 \times 10^{-5}$	11	9	9	7	5	8	13	10	11	8	6	9
	$1 \times 10^{-10}$	39	34	32	25	19	30	39	37	36	28	22	33
	$1 \times 10^{-15}$	82	75	70	58	46	67	88	80	76	63	51	72
2	$1 \times 10^{-5}$	7	5	6	5	4	4	8	6	7	6	5	5
	$1 \times 10^{-10}$	21	18	18	16	13	16	23	20	21	18	14	18
	$1 \times 10^{-15}$	44	39	39	33	28	36	47	42	42	37	31	39
5	$1 \times 10^{-5}$	4	3	4	4	3	3	4	3	5	4	3	3
	$1 \times 10^{-10}$	11	8	10	9	8	8	12	10	11	10	9	9
	$1 \times 10^{-15}$	20	18	19	18	15	17	22	19	21	19	17	18

## (b) 正規分布関数

上述のガンマ分布関数で  $a = 1/2$  とおいて,

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} t^{-1/2} e^{-t} \quad (0 < t < \infty),$$

$$a_s = 2s - \frac{3}{2}, \quad b_s = s(s - \frac{1}{2})$$

を考える。  $x = u^2/2$  と変数変換して考えると,

$$\frac{u}{2} F\left(\frac{u^2}{2}\right) = e^{u^2/2} \int_u^\infty e^{-t^2/2} dt = R(u)$$

となり, これは正規分布の上側確率を確率密度で規格化したもので, ミルズ比 (Mills' ratio) と呼ばれる関数  $R(u)$  に対応している。ここで,

$$u_{2s-1} = \frac{2}{u} (w_s + s - \frac{1}{2}), \quad u_{2s} = \frac{2s}{u + u_{2s+1}}$$

と定義すると,

$$R(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} + \frac{2}{u} + \cdots + \frac{n-1}{u+u_n}$$

と書き換えられることがわかる。これは Laplace 連分数としてよく知られたものであり, 誤差関数の数値計算で現在でもよく用いられているものである。ここで, 元の tail  $w_n$  の代わりに  $u_n$  の漸近展開を考えると, 以下の式ようになる。

$$u_n \sim \sqrt{n} - \frac{u}{2} + \frac{u^2-2}{8\sqrt{n}} + \frac{u}{8n} - \frac{u^4-4u^2-4}{128n\sqrt{n}} - \frac{u^3-2u}{32n^2} + \cdots$$

この漸近展開において第  $k$  項まで一致する逐次近似  $u_n^{(k)}$  を考察し,  $R(u)$  の計算において  $u_n \doteq u_n^{(k)}$  と近似した  $R_n^{(k)}$  を用いて近似計算することを考える [10]。

$$(b0) \quad u_n^{(0)} = 0$$

$$(b1) \quad u_n^{(1)} = \sqrt{n}$$

$$(b2) \quad u_n^{(2)} = \sqrt{n + \frac{u^2}{4}} - \frac{u}{2} \equiv v_n$$

$$(b3) \quad u_n^{(3)} = v_{n-1/2}$$

$$(b4) \quad u_n^{(4)} = v_n(1 - \frac{1}{4n})$$

$$(b5) \quad u_n^{(5)} = v_n(n - \frac{1}{8} + \frac{u^2}{4}) / (n + \frac{1}{8} + \frac{u^2}{4})$$

$$(b6) \quad u_n^{(6)} = \sqrt{z_n + \frac{1}{8z_n}} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{8z_n})u, \quad \text{ただし, } z_n = n - \frac{1}{2} + \frac{u^2}{4}$$



$$(\Delta) u_n^{(\Delta)} = \frac{n}{h_{n+1}}, \quad \text{ただし, } h_{n+1} = u + \frac{n}{h_n}, \quad h_1 = u$$

以下の図表では、代表的な  $u, n$  の数値を与えたときの計算例を示す。

図1. 正規分布関数の数値計算において、項数  $n=10$  (左図) または  $20$  (右図) のときの相対誤差  $|R_n^{(k)} / R(u) - 1|$  の  $u$  に対するグラフ ( $u_n$  の  $k$  項近似  $u_n^{(k)}$  を用いる)

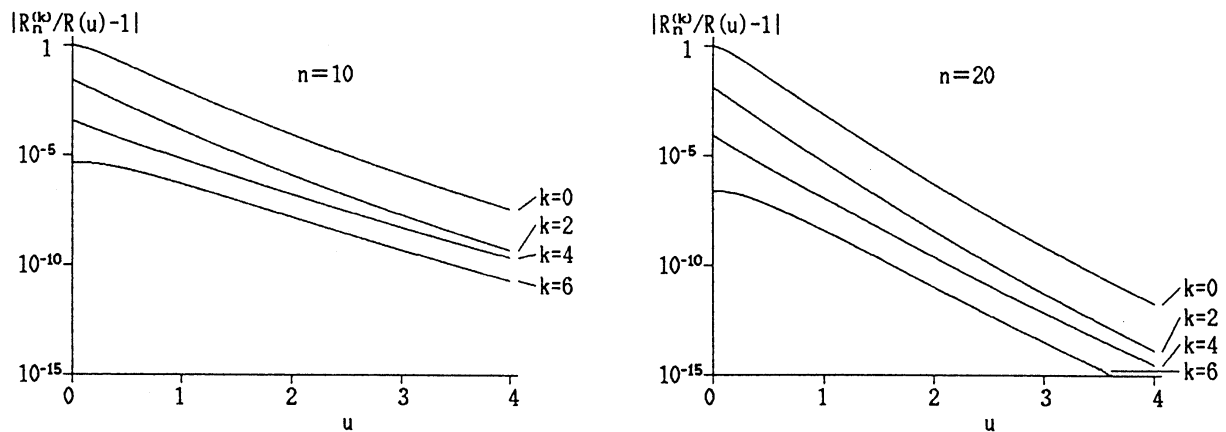


表2. 正規分布関数の数値計算において、代表的な数値  $u$  に対して、相対誤差  $|R_n^{(k)} / R(u) - 1|$  が与えられた数値を下回るのに必要な項数  $n$ , ただし, \*\* は100項以上, - は計算不可能を示す

$u$	相対誤差	(b0)	(b1)	(b2)	(b3)	(b4)	(b5)	(b6)	( $\Delta$ )
0	$1 \times 10^{-5}$	—	**	**	80	57	17	9	—
	$1 \times 10^{-10}$	—	**	**	**	**	**	**	—
	$1 \times 10^{-15}$	—	**	**	**	**	**	**	—
0.1	$1 \times 10^{-5}$	**	**	**	62	35	16	9	**
	$1 \times 10^{-10}$	**	**	**	**	**	**	**	**
	$1 \times 10^{-15}$	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	$1 \times 10^{-5}$	**	74	46	23	15	11	8	41
	$1 \times 10^{-10}$	**	**	**	**	**	86	55	**
	$1 \times 10^{-15}$	**	**	**	**	**	**	**	**
1	$1 \times 10^{-5}$	44	27	18	13	10	7	6	13
	$1 \times 10^{-10}$	**	**	85	64	50	40	31	68
	$1 \times 10^{-15}$	**	**	**	**	**	**	92	**
2	$1 \times 10^{-5}$	14	11	8	7	6	5	5	7
	$1 \times 10^{-10}$	45	37	29	25	22	18	17	26
	$1 \times 10^{-15}$	**	79	64	58	51	43	39	59

## (c) ベータ分布関数

確率密度関数  $g(t)$  とそれに対応した係数  $a_s, b_s$  として,

$$g(t) = \frac{1}{B(a,b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \quad (0 < t < 1), \quad a > 0, b > 0,$$

$$a_s = c_{s-1} + d_s, \quad b_s = c_s d_s,$$

$$c_s = \frac{s(s+b-1)}{(2s+a+b-1)(2s+a+b-2)}, \quad d_s = \frac{(s+a-1)(s+a+b-2)}{(2s+a+b-2)(2s+a+b-3)}$$

を考える。このとき,  $\text{tail } w_n$  の漸近展開は以下ようになる。

$$w_n \sim k_0 + \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n^2} + \cdots,$$

$$k_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x} - x - \frac{1}{2}), \quad k_1 = 0,$$

$$k_2 \sqrt{x^2+x} = \frac{1}{16}(a - \frac{1}{2})(a - \frac{3}{2}) - \frac{1}{8}(k_0 + \frac{1}{4})(a-b)(a+b-2) \quad .$$

ここで, パラメータ  $a, b$  の変換を介して, 分布関数  $G(x)$  と Stieltjes 変換  $F(x)$  とは,

$$\frac{G(x; a, b)}{g(x; a, b)} = \frac{1-x}{a} F\left(\frac{1}{x}; 1-b, a+b\right), \quad 0 < x < 1, \quad a > 0, \quad 0 < b < 1$$

の式で関係づけられるので,  $0 < a < 1, 0 < b < 1$  のときの  $F(x; a, b)$  を考察すれば十分である。したがって, このパラメータ領域において, 上述の漸近展開において第  $i$  項まで一致する逐次近似  $w_n^{(i)}$  を考察し,  $S_n(w_n^{(i)})$  を用いて近似計算することを考える。

$$(c0) \quad w_n^{(0)} = 0$$

$$(c2) \quad w_n^{(2)} = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x} - x - \frac{1}{2})$$

$$(c3) \quad w_n^{(3)} = \frac{1}{2}(\sqrt{(x+a_n)^2 - 4b_{n-1}} - x - a_n)$$

$$(\Delta) \quad w_n^{(\Delta)} = -\frac{b_n}{h_{n+1}} \quad (\text{Aitken's } \Delta^2)$$

以下の表では, 代表的な  $a, b, x, n$  の数値を与えたときの計算例を示す。

表3. ベータ分布関数の数値計算において、代表的な数値  $a, b, x$  に対して、相対誤差  $|S_n(w_n^{(i)})/F(x) - 1|$  が与えられた数値を下回るのに必要な項数  $n$

$x$	相対誤差	$a=0.2, b=0.6$				$a=0.8, b=0.6$			
		(c0)	(c2)	(c3)	( $\Delta$ )	(c0)	(c2)	(c3)	( $\Delta$ )
0.1	$1 \times 10^{-5}$	10	7	6	6	10	6	6	6
	$1 \times 10^{-10}$	19	15	14	13	19	14	13	13
	$1 \times 10^{-15}$	28	23	22	21	29	23	21	21
0.2	$1 \times 10^{-5}$	7	5	5	4	7	5	4	4
	$1 \times 10^{-10}$	14	11	10	9	14	11	10	9
	$1 \times 10^{-15}$	21	17	16	15	21	17	16	15
0.5	$1 \times 10^{-5}$	5	4	4	3	5	4	4	3
	$1 \times 10^{-10}$	9	7	7	6	9	7	7	6
	$1 \times 10^{-15}$	14	11	11	10	14	11	11	10
1	$1 \times 10^{-5}$	4	3	3	2	4	3	3	2
	$1 \times 10^{-10}$	7	6	6	5	7	6	6	5
	$1 \times 10^{-15}$	10	9	8	8	10	9	8	8

## 6. 適用例(2) - $x$ に関する展開-

ここでは前述の3つの例の中で特に正規分布関数の場合が効果的であるので、その例のみを紹介することにする。そこでの  $w_n$  の  $x$  に関する展開を考えるが、その代わりに変数変換して定義した tail  $u_n$  を、変数  $u$  について展開して考察する。まず、積分表示

$$u_n = \int_0^\infty t^n e^{-ut} e^{-t^2/2} dt / \int_0^\infty t^{n-1} e^{-ut} e^{-t^2/2} dt$$

により、次の微分方程式が成り立つことがわかる。

$$\frac{du_n}{du} = u_n(u_n + u) - n.$$

これより、

$$u_n = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j u^j$$

と展開すると、その係数は

$$\gamma_0 = \sqrt{2} \Gamma(\frac{n+1}{2}) / \Gamma(\frac{n}{2}), \quad \gamma_1 = \gamma_0^2 - n, \quad j\gamma_j = \gamma_{j-2} + \sum_{i=0}^{j-1} \gamma_i \gamma_{j-1-i} \quad (j \geq 2)$$

のように、順に求められる。この展開を有限の第  $k$  項で打ち切り、 $u_n$  に対する近似として用いて、 $R(u)$  に対する近似  $R_n^{(k)}$  を計算することを考える。

以下の図表では、代表的な  $u, n, k$  の数値を与えたときの計算例を示す。

図2. 正規分布関数の数値計算において、項数  $n=10$  (左図) または  $20$  (右図) のときの相対誤差  $|R_n^{(k)} / R(u) - 1|$  の  $u$  に対するグラフ ( $u_n$  の  $k$  項近似  $u_n^{(k)}$  を用いる)

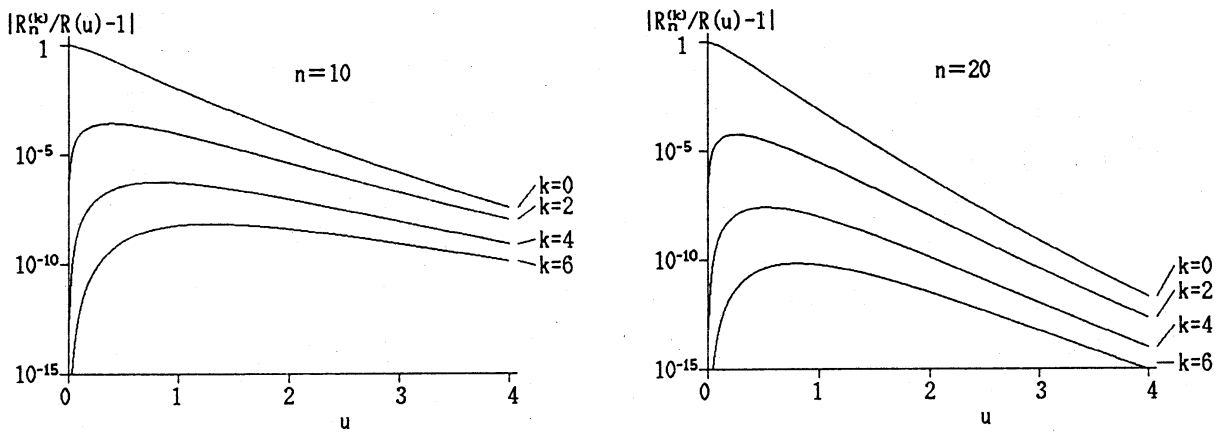


表4. 正規分布関数の数値計算において、代表的な数値  $u$  に対して、相対誤差  $|R_n^{(k)} / R(u) - 1|$  が与えられた数値を下回るのに必要な項数  $n$ , ただし, \*\* は100項以上, - は計算不可能を示し, (d0)~(d6)は  $u$  の展開で第0~6項まで考慮した近似  $u_n^{(k)}$  を用いる

$u$	相対誤差	(d0)	(d1)	(d2)	(d3)	(d4)	(d5)	(d6)
0	$1 \times 10^{-5}$	-	1	1	1	1	1	1
	$1 \times 10^{-10}$	-	1	1	1	1	1	1
	$1 \times 10^{-15}$	-	1	1	1	1	1	1
0.1	$1 \times 10^{-5}$	**	**	40	2	1	1	1
	$1 \times 10^{-10}$	**	**	**	86	48	7	2
	$1 \times 10^{-15}$	**	**	**	**	**	**	64
0.5	$1 \times 10^{-5}$	**	72	28	6	4	2	1
	$1 \times 10^{-10}$	**	**	**	68	60	23	17
	$1 \times 10^{-15}$	**	**	**	**	**	**	**
1	$1 \times 10^{-5}$	44	27	16	7	6	4	2
	$1 \times 10^{-10}$	**	**	79	40	38	22	19
	$1 \times 10^{-15}$	**	**	**	**	**	71	66
2	$1 \times 10^{-5}$	14	11	9	6	6	5	3
	$1 \times 10^{-10}$	45	37	31	22	21	16	15
	$1 \times 10^{-15}$	**	79	68	50	49	38	37

## 7. まとめ

以上のように、確率分布関数の数値計算において、その連分数展開の収束が変形連分数を用いることにより加速化されることがわかった。上述の計算例の中では、特にガンマ分布関数やベータ分布関数の例において、一見すると従来よく知られた  $\Delta^2$  アルゴリズムと比較して、加速化の程度はそれほど効果的なものではないと感じられるかもしれない。しかしながら、今回の変形連分数による加速法は backward algorithm での連分数の数値計算にも適用が可能になるという大きな利点を持っている。すなわち、 $\Delta^2$  アル

ゴリズムなどの手法は、連分数を初項から順次求めていく forward algorithm においてのみ有効な手法であるのに対して、今回の加速法は forward, backward のいずれにも適用可能になることがわかる。したがって、計算誤差の累積しない安定したアルゴリズムとして、backward の優位性が見られる場合が多いが、そのときには、特に効果的な加速法として利用価値が高いと考えられる。

このように、連分数の tail の展開項数  $n$  に対する依存性が求められるときは、変形連分数を逐次近似的に用いることによって、安定したアルゴリズムのもとでの加速化が可能になると言える。なお、ここで紹介した例では、パラメータ  $x$  の小さい領域では元の連分数の収束が遅く、 $\epsilon$  アルゴリズムなどの良く知られた加速法が効果的には機能しなくなるが、その場合でも効率的な加速化が可能になることもわかる。さらに、ここでの変形連分数の数列に  $\epsilon$  アルゴリズムなどの手法を課して 2 重の加速化を図ることも可能であるが、その場合には平方根の計算などが相当に面倒になることを覚悟しなければならないであろう。簡略な計算のままで高次の近似を考察することは、いずれにしても重要なテーマの 1 つである。

また、他の一般的な数列に、ここでの square-root modification に対応する加速化を適用することも重要な試みの 1 つである。すなわち、収束する数列  $\{f_n\}$  の第  $n$  項までを用いた効率的な組み合わせとして、 $\epsilon$  アルゴリズムなどの非線形な変換が解釈可能であるが、それをさらに無理関数まで枠を広げて一般化することが可能であれば応用価値が高いであろう。このように、逐次近似の高次項と他の数列への適用の問題が今後の重要課題となるであろう。

## 参考文献

- [1] C. Brezinski, Convergence Acceleration Methods : The Past Decade. J. Comput. Appl. Math., **12&13** (1985) 19-36.
- [2] P. Wynn, Converging Factors for Continued Fractions. Numer. Math., **1** (1959) 272-320.
- [3] W. B. Jones and W. J. Thron, *Continued Fractions, Analytic Theory and Applications*. Cambridge University Press, New York, 1984.
- [4] W. J. Thron and H. Waadeland, Modifications of Continued Fractions, a Survey. *Analytic Theory of Continued Fractions* (Springer-Verlag, Berlin, 1982) 38-66.
- [5] L. Jacobsen, W. B. Jones and H. Waadeland, Further Results on the Computation of Incomplete Gamma Functions. *Analytic Theory of Continued Fractions II* (Springer-Verlag, Berlin, 1986) 67-89.
- [6] H. Waadeland, Computation of Continued Fractions by Square-root Modification. *Continued Fractions and Padé Approximants* (ed. C. Brezinski, North-Holland, Amsterdam, 1990) 315-329.
- [7] K. O. Bowman and L. R. Shenton, *Continued Fractions in Statistical Applications*. Mercel Dekker Inc., New York, 1989.
- [8] 山内二郎編「統計数値表」日本規格協会, 1977.
- [9] W. B. Jones and W. J. Thron, Continued Fractions in Numerical Analysis. *Continued Fractions and Padé Approximants* (ed. C. Brezinski, North-Holland, Amsterdam, 1990) 169-256.
- [10] 中山功「正規分布関数の展開式 - C A I プログラムへの適用を考慮して -」第58回日本統計学会講演報告集 (1990) 99-100.
- [11] 中山功「ある確率分布関数族の数値計算 - Stieltjes 変換の変形アルゴリズム -」日本応用数理学会平成 6 年度講演予稿集 (1994) 184-185.